Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 23** (presencial e E@D)

TP4D-1 e TP4D-2: 4ª feira, 02/06, 16h30 (E@D) ; TP4D-3: 6ª feira, 04/06, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 02/06, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 04/06, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 77 a 81 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slides 25 a 27 — EDOs lineares de ordem n

Definição: Uma EDO linear de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) é uma equação do tipo

$$\boxed{a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ são funções contínuas num certo intervalo I, com $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Notas:

- $b(x) \neq 0 \rightsquigarrow$ EDO linear completa
- $b(x) = 0 \rightsquigarrow$ EDO linear homogénea
- $a_j(x) = \alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$ $\rightsquigarrow$ EDO linear de coeficientes constantes
(constantes)
- Se $b(x) \neq 0$, chama-se EDO linear homogénea associada à EDO que se obtém da inicial substituindo $b(x)$ por zero.

Exercício 1: Indique quais das seguintes EDOs são lineares. Em caso afirmativo diga se são completas, homogéneas e/ou de coeficientes constantes.

a) $y'' + \frac{1}{x} y' + 3y = 1 + 5x$

b) $y''' + 2yy'' + \ln(x)\,y = 0$

c) $y^{(5)} + 3y' + 2y = 0$

d) $\operatorname{tg}(t)\,y'' + e^t y' + t^7 y = 5y$

e) $y^{(4)} + x(y'')^3 + y' + \ln(x)\,y = e^x$

Slide 28

Solução geral de EDOs lineares de ordem n

$y = y_H + y_p$ → uma solução particular (qualquer) da EDO linear completa

y: solução geral da EDO linear completa

y_H: solução geral da EDO linear homogénea associada

Procedimento para resolver EDOs lineares completas

1.ª Etapa: Determinar y_H (nesta aula)

2.ª Etapa: Determinar y_p (próximas aulas)

3.ª Etapa: A solução geral é $y = y_H + y_p$

Slides 29 a 33

Determinar y_H (caso geral)

Teorema: Uma EDO linear homogénea de ordem n, $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ admite um <u>sistema fundamental de soluções (S.F.S.)</u> $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ composto por n soluções linearmente independentes.

A solução geral da EDO linear homogénea é:

$$\boxed{y_H = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)}, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

Método para verificar se as soluções são linearmente independentes

O seguinte determinante, chamado <u>Wronskiano</u>, tem de ser $\neq 0$

$n = 2 \rightsquigarrow \{\varphi_1, \varphi_2\}$ são L.I. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0$

$n = 3 \rightsquigarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ são L.I. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} \neq 0$

Exercício 2: Considere-se a EDO linear homogénea $y'' + 4y' - 5y = 0$.
Verifique quais dos seguintes conjuntos formam um S.F.S. desta EDO e, nesse caso, escreva a sua solução geral.

a) $\{e^x\}$ b) $\{e^x; \operatorname{sen} x\}$ c) $\{e^x; e^{-5x}\}$ d) $\{e^x; 3e^x\}$

Slides 34 a 36 Determinar y_H (EDO de coeficientes constantes)

EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes

↳ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

Equação característica da EDO anterior: $\underbrace{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0}_{\text{polinómio característico}} = 0$

Exercício 3: Escrever a eq. característica da EDO $y''' - 3y'' + 2y = 0$

Exercício 4: Escrever a EDO cuja eq. característica é $r(r+1)(r-2) = 0$

Da resolução da eq. característica resultam n raízes (reais ou complexas) que vão definir o S.F.S.. Temos 4 casos a considerar.
↳ zeros

Caso	Se a eq. característica contiver	O S.F.S. inclui as soluções
1	k raízes reais simples $r_1, r_2, \dots, r_k$ (distintas)	$e^{r_1 x}$; $e^{r_2 x}$; ... ; $e^{r_k x}$
2	uma raiz real r com multiplicidade $k>1$	e^{rx} ; $x e^{rx}$; $x^2 e^{rx}$; $x^{k-1} e^{rx}$
3	um par de raízes complexas simples: $r = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cos(\beta x)$; $e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$
4	um par de raízes complexas $r = \alpha \pm \beta i$ com multiplicidade $k>1$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; $x e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; ...; $x^{k-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$; $x e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$; ...; $x^{k-1} e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

Exercício 5: Escrever a solução geral da EDO cuja eq. característica tem raízes
$r_1 = -2$; $r_2 = 3$; $r_3 = 3$; $r_4 = 2+4i$; $r_5 = 2-4i$

Exercício 6: Determinar a solução geral das seguintes EDOs lineares homogéneas

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$
b) $y^{(4)} + y'' = 0$
c) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$
d) $2y^{(5)} - 8y^{(4)} + 8y''' = 0$
e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

TPCs: Folha prática 4: 24
2.º teste, 13/06/2018 → Ex.7
1.º teste, 05/04/2017 → Ex.7

Aula 23

1a) EDO linear de 2ª ordem completa

Nota: EDO linear homogénea associada: $y'' + \frac{1}{x}y' + 3y = 0$

b) Não é linear pois o coeficiente de y'' depende de y

c) EDO linear homogénea de coeficientes constantes de ordem 5

d) $tg(t)y'' + e^t y' + t^7 y = 5y$

$\Leftrightarrow tg(t)y'' + e^t y' + (t^7 - 5)y = 0$ EDO linear homogénea de ordem 2.

e) Não é linear pois tem $(y'')^3$

---

2) $y'' + 4y' - 5y = 0 \rightsquigarrow$ ordem 2

↓

S.F.S. tem 2 soluções

Procedimento para verificar se um conjunto é S.F.S.

1º Passo: Verificar se todas as funções do conjunto são soluções da EDO.

2º Passo: Verificar se são linearmente independentes

↳ Wronskiano diferente de zero.

a) $\{e^x\}$ -> Não pode ser S.F.S. pois tem só uma função.

b) $\{\underbrace{e^x}_{\varphi_1(x)}, \underbrace{\boxed{\operatorname{sen} x}}_{\varphi_2(x)}\}$

1º Passo: $\varphi_1(x) = e^x$ é solução?

$\varphi_1'(x) = e^x \qquad \varphi_1''(x) = e^x$

$y'' + 4y' - 5y = 0 \rightsquigarrow e^x + 4e^x - 5e^x = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

φ_1 é solução da EDO

$\varphi_2(x) = \operatorname{sen} x$ é solução?

$\varphi_2'(x) = \cos x \; ; \; \varphi_2''(x) = \operatorname{sen} x$

$y'' + 4y' - 5y = 0 \rightsquigarrow -\operatorname{sen} x + 4\cos x - 5\operatorname{sen} x = 0$

$\Leftrightarrow -6\operatorname{sen} x + 4\cos x = 0$

Falso

φ_2 não é solução

Logo não é um S.F.S.

c) $\left\{ \underbrace{e^{x}}_{f_1(x)} ; \underbrace{e^{-5x}}_{f_2(x)} \right\}$

$y''+4y'-5y=0 \rightsquigarrow 25e^{-5x}+4\times(-5e^{-5x}) -5e^{-5x}=0 \Leftrightarrow 0=0$ ✓

$f_1(x)=e^{x}$ é solução? ✓ (alínea anterior)

$f_2(x)=e^{-5x}$ é solução?

$f_2'(x) = -5e^{-5x}$

$f_2''(x) = 25e^{-5x}$

2º Passo:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-5x} \\ e^{x} & -5e^{-5x} \end{vmatrix}$$

$= e^{x}\times(-5e^{-5x}) - e^{x}\times e^{-5x}$

$= -5e^{-4x} - e^{-4x}$

$= -6e^{-4x} \neq 0$

Conclusão: $\{e^{x}; e^{-5x}\}$ é um S.F.S.

A solução geral é: $y_H(x) = C_1e^{x}+C_2e^{-5x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) T.P.C. $\rightsquigarrow$ Não é S.F.S. pois o Wronksiano $=0$.

3) $y''-3y'+2y=0$

$\downarrow$ Eq. caracteristica

$r^3-3r^2+2=0$

4) Eq. característica: $r(r+1)(r-2)=0$

$\downarrow$ EDO

$\Leftrightarrow (r^2+r)(r-2)=0$

$\Leftrightarrow r^3-2r^2+r^2-2r=0$

$\Leftrightarrow r^3-r^2-2r=0$

$\downarrow$

$y'''-y''-2y'=0$

5) $r_1 = -2$; $r_2 = 3$; $r_3 = 3$; $r_4 = 2+4i$; $r_5 = 2-4i$

$\underbrace{r_1=-2}_{1^\circ \text{ caso}} \to e^{-2x}$

$\underbrace{r_2=3;\ r_3=3}_{2^\circ \text{ caso}} \to e^{3x};\ xe^{3x}$

$\underbrace{r_4=2+4i;\ r_5=2-4i}_{3^\circ \text{ caso}:\ \alpha=2,\ \beta=4} \to e^{2x}\cos(4x);\ e^{2x}\operatorname{sen}(4x)$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x} + C_4 e^{2x}\cos(4x) + C_5 e^{2x}\operatorname{sen}(4x),$$

$\underbrace{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5}_{\text{ou}}$

$C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, 5$

6) a) $y'' + 4y' + 3y = 0$

Soluções x_1 e x_2

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

1º Passo: Escrever a eq. característica e determinar as suas raízes.

$r^2 + 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow \overset{\text{T.P.C.}}{\cdots} \Leftrightarrow r = -1 \vee r = -3$

2º Passo: Escrever o S.F.S. $\longrightarrow$ ver tabela

$$S.F.S. = \{e^{-x};\ e^{-3x}\}$$

Exercício 6: Determinar a solução geral das seguintes EDOs lineares homogéneas

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$

b) $y^{(4)} + y'' = 0$

c) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$

d) $2y^{(5)} - 8y^{(4)} + 8y''' = 0$

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

3º Passo: Escrever a solução geral

$$y_M = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $y^{(4)} + y'' = 0$

1º) $r^4 + r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2(r^2+1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{r=0}_{\text{dupla}} \vee r = \pm i$

$\alpha = 0;\ \beta = 1$

2º) $S.F.S. = \{\underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0x}}};\ x\underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0x}}};\ \underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0x}}}\cos(1x);\ \underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0x}}}\operatorname{sen}(1x)\}$

3º) $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

c) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$

1º) $r^3 + 2r^2 + 5r = 0$

$\Leftrightarrow r(r^2 + 2r + 5) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{r=0} \vee r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times1\times5}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow r = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$\Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$

$\alpha = -1$

$\beta = 2$

2º) $S.F.S. = \{ \underbrace{e^{0x}}_{=1} ; e^{-x}\cos(2x) ; e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \}$

3º) $y_H = C_1 + C_2 e^{-x}\cos(2x) + C_3 e^{-x}\operatorname{sen}(2x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

d) $2y^{(5)} - 8y^{(4)} + 8y''' = 0$

1º) $2r^5 - 8r^4 + 8r^3 = 0$

$\Leftrightarrow r^3(2r^2 - 8r + 8) = 0$

$\Leftrightarrow r^3 = 0 \vee 2r^2 - 8r + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{r = 0}_{\text{tripla}} \vee \underbrace{r = 2 \vee r = 2}_{\text{dupla}}$

2º) $S.F.S. = \{ \overset{e^{0x}}{1} ; x ; x^2 ; e^{2x} ; x e^{2x} \}$

3º) $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 x e^{2x}, \quad C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 5$

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

1º) $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$

Regra de Ruffini

$r = -1$ é solução

	1	3	3	1
		+		
-1		-1	-2	-1
	1	2	1	$\boxed{0}$ = Resto

C. aux $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow r = -1 \vee r = -1$

raiz é $r = -1$ (tripla)

2º) $S.F.S. = \{ e^{-x} ; x e^{-x} ; x^2 e^{-x} \}$

3º) $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$